§ RELATIVIDADE e MECÂNICA QUÂNTICA

Em Relatividade, o invariante fundamental é

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^{\,2},$$

com $x^0 \equiv ct$, $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Para o quadrivetor usamos índice grego:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

O tensor métrico, ou matriz de Minkowsky é dado por:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e é o tensor que sobe e desce o índice

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x}) \qquad (*)$$

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = g^{\mu\nu} \Delta x_\mu \Delta x_\nu = \Delta x_\mu \Delta x^\mu$$

Também:

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$$

(*) usamos a notação de Einstein em todas partes, significando

$$a_\mu b^\mu \rightarrow \sum_\mu a_\mu x^\mu$$

As transformações permitidas são as transformações de Lorentz :

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu})$$

$dx'^{\mu} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda}$. Para o invariante fundamental

$$ds^2 = dx'^{\mu} dx'_{\mu} = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\lambda} dx^{\sigma}$$

$$= g_{\lambda\sigma} dx^{\lambda} dx^{\sigma} ,$$

obtemos assim :

$$g'_{\mu\nu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = g_{\lambda\sigma} \quad \text{(Covariância)}$$

As transformações de Lorentz, além da propriedade covariante, deixam invariante o valor numérico do tensor métrico. Isto implica que as transformações são lineares. O grupo de Poincaré combina translações com transformações de Lorentz homogêneas:

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}$$

$$g'_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\lambda\sigma} .$$

Para obter uma equação relativística usamos as relações de de Broglie - Einstein

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar \nabla$$

mas no caso relativístico, temos o quadrivetor momentum

$$p^\mu = m u^\mu = (E/c, \vec{p})$$

e a relação de dispersão

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

Escrevendo: $\nabla_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

e $\nabla^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \longrightarrow i\hbar\nabla^\mu$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 = -\hbar^2\nabla^\mu\nabla_\mu$$

<u>Def</u>: Operador $\Box$ (D'alambertiano)

$$\nabla^\mu\nabla_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \Box$$

A equação invariante (covariante) relativística mais simples que podemos escrever é

$$\boxed{\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) = 0}$$

(Eq. de Klein-Gordon)

Se quisermos dar à ϕ a interpretação probabilística, deveríamos ter uma equação de continuidade, do tipo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0$$

com $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$. Escrevamos a eq. de Klein-Gordon como

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = \nabla^2\phi - \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi & /\ \phi^* \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* = \nabla^2\phi^* - \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^* & /\ \phi \end{cases}$$

Substraindo a segunda equação:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) = \phi^*\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi^*$$

e $\phi^*\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\phi^*\nabla\phi) - \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi$,

assim:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) = \nabla\cdot\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right)$$

Def: ~~Corrente~~ densidade de corrente:

$$\vec{j} \equiv \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi\nabla\phi^* - \phi^*\nabla\phi\right)$$

$$\rho \equiv \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$$

Note que a definição de $\vec{j}$ é a mesma que a dada para a Mecânica Quântica não-relativística. Assim temos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \quad .$$

▸ Problema: i) A densidade $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$ não é definida como sendo positiva. O problema de valores iniciais da eq. de Klein-Gordon é um problema de Cauchy. Precisamos dar valores iniciais a

$$\phi(\vec{x},0), \quad \frac{\partial\phi}{\partial t}(\vec{x},t=0) \quad ,$$

e estes valores podem ser arbitrários. Portanto ρ representa a densidade de uma grandeza conservada (por exemplo a carga), mas não é uma densidade de probabilidade positiva;

ii) A solução que é uma onda plana

$$\phi(\vec{x},t) = A\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} ,$$

satisfaz a eq. de Klein-Gordon com $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Assim temos soluções com energia negativa

$$E = -\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} ,$$

que aparecem no mesmo pé que as soluções com energia positiva.

Considerações heurísticas para escrever a eq. de Dirac:

i) escrever uma eq. dinâmica na forma de uma eq. de Schrödinger, linear, e de primeira ordem na derivada temporal

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathcal{H}_{(D)}\psi \quad ; \qquad (1)$$

ii) as componentes de ψ (pode ser um spinor) devem satisfazer a eq. de Klein-Gordon, de maneira que ondas planas com

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad (2)$$

sejam soluções;

iii) deve existir um quadrivetor densidade de corrente que seja conservado, e cuja componente $j^0 = c\rho$ seja definida positiva;

iv) as componentes de ψ não têm que satisfazer nenhuma condição auxiliar, isto é, para um tempo dado, elas são funções independentes de $\vec{x}$

v) a equação deve ser covariante por Lorentz

Como fazemos a correspondência

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \ ,$$

escrevemos o Hamiltoniano de Dirac como

$$\mathcal{H}_{(D)} = \vec{A}\cdot\nabla + B \ ,$$

onde as matrizes $(\vec{A}, B)$ não dependem das coordenadas nem do tempo. Assim:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \mathcal{H}_{(D)}\right] = 0$$

Quadramos a eq. (1):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\, i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_{(D)}\psi = i\hbar\,\mathcal{H}_{(D)}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= \mathcal{H}_{(D)}^2\,\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi$$

ou

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \mathcal{H}_{(D)}^2 = m^2c^4 - c^2\hbar^2\nabla^2$$

$$= (\vec{A}\cdot\nabla + B)(\vec{A}\cdot\nabla + B) = (A^i\nabla_i + B)(A^j\nabla_j + B)$$

(usamos índices latinos para a parte espacial, $i = 1,2,3$;
e índices gregos para o espaço-tempo, $\mu = 0,1,2,3$)

$$= A^iA^j\,\nabla_i\nabla_j + (A^jB + BA^j)\nabla_j + B^2$$

$$= \frac{1}{2}(A^iA^j + A^jA^i)\,\nabla_i\nabla_j + (A^jB + BA^j)\nabla_j + B^2$$

$$= m^2c^4 - c^2\hbar^2\,\delta^{ij}\,\nabla_i\nabla_j\,.$$

Comparando, obtemos as relações:

$$(*)\quad\begin{cases} A^iA^j + A^jA^i = \{A^i, A^j\} = -2c^2\hbar^2\delta^{ij}\,, & i,j = 1,2,3 \\ A^jB + BA^j = \{A^j, B\} = 0 \\ B^2 = m^2c^4 \end{cases}$$

As relações (*) definem a chamada Álgebra de Dirac.
Escalamos as matrizes, definindo:

$$\begin{cases} -i\hbar c\,\alpha^i \equiv A^i \\ mc^2\beta \equiv B \end{cases}$$

e as α^i's e β satisfazem as relações

$$\boxed{\text{Álgebra de Dirac} \begin{cases} \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = \{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}\,, \\ \{\alpha^i, \beta\} = 0\,, \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \\ \beta^2 = 1\,, \end{cases}}$$

A equação tentativa fica na forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -ic\hbar\,\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi + mc^2\beta\psi$$

$$= c\hbar\,\frac{\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi}{i} + mc^2\beta\psi$$

com $\mathcal{H}_{(D)} = c\hbar\,\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\nabla}{i} + mc^2\beta$

$$= c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta$$

Como $\mathcal{H}_{(D)}$ precisa ser hermiteano, temos resultado

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i$$

$$\beta^\dagger = \beta$$

Também:

$$(\alpha^i)^2 = 1\,, \quad \beta^2 = 1\,, \quad i = 1,2,3$$

a) Todos os autovalores dos α^i's e β são ± 1

b) $Tr(\alpha^i) = 0, \quad i = 1,2,3$

$Tr(\beta) = 0.$

Dem.

$$\alpha^i\beta = -\beta\alpha^i \Rightarrow \alpha^i\beta(\alpha^i)^{-1} = -\beta$$

Tomando Tr:

$$Tr(\alpha^i\beta(\alpha^i)^{-1}) = Tr\,\beta = -Tr\,\beta \therefore$$

$$\Rightarrow Tr\,\beta = 0$$

Também temos: $\alpha^i\beta = -\beta\alpha^i \Rightarrow (\beta)^{-1}\alpha^i\beta = -\alpha^i$

$$Tr\left[(\beta)^{-1}\alpha^i\beta\right] = Tr(\alpha^i) = -Tr(\alpha^i)$$

$$\Rightarrow Tr\,\alpha^i = 0, \quad i = 1,2,3$$

Nota: As inversas de α^i e β existem porque os autovalores são ± 1

c) A dimensão de β e α^i é par!

I Primeira tentativa: $N=2$

A álgebra das α^i é idêntica às matrizes de Pauli. Tomar

$$\alpha^1 = \sigma_x, \quad \alpha^2 = \sigma_y, \quad \alpha^3 = \sigma_z$$

Sabemos que as matrizes de Pauli anticomutam, são de quadrado unitário, e têm traço nulo:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$Tr\,\sigma_i = 0$$

$$\sigma_i^2 = 1$$

Os autovalores são ± 1. Portanto, todo conjunto de matrizes γi que satisfaz a mesma álgebra é equivalente às matrizes de Pauli.

▸ <u>Impossibilidade</u>:

<u>não</u> existe outra matriz β com as mesmas propriedades.

II <u>N=4</u> Existem representações da álgebra

$$\alpha^i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma_i \\ \hline \sigma_i & 0 \end{array}\right) \quad , \; i=1,2,3$$

$$\beta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$

Estas matrizes podem ser multiplicadas por blocos:

$$\alpha^i \alpha^j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma_i \\ \hline \sigma_i & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma_j \\ \hline \sigma_j & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ \hline 0 & \sigma_i \sigma_j \end{array}\right)$$

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = \left(\begin{array}{c:c} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i & 0 \\ \hdashline 0 & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \end{array}\right) = 2\delta_{ij}$$

▸ **Def**: As matrizes γ^μ

$$\boxed{\begin{aligned} &\gamma^0 \equiv \beta \\ &\gamma^i \equiv \beta\alpha^i, \quad i=1,2,3 \end{aligned}}$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i$$

$$= -\beta^2\alpha^i\alpha^j - \beta^2\alpha^j\alpha^i = -2\delta^{ij}$$

$$\{\beta, \gamma^i\} = \beta^2\alpha^i + \beta\alpha^i\beta = \alpha^i - \beta^2\alpha^i = 0$$

Assim temos as relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico

▸ **Def**: γ^5

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

Na representação assumida temos

$$\gamma^5 = \left(\begin{array}{c:c} 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 \end{array}\right)$$

Assim ψ resulta um spinor de 4 componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger = (\psi_1^* \; \psi_2^* \; \psi_3^* \; \psi_4^*)$$

Def: Feynman "slash"

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$$

Escrevamos a eq. de Dirac na forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi + i\hbar \alpha^i \nabla_i \psi = mc \beta \psi$$

e multiplicando por β pela esquerda:

$$i\hbar \left[\beta \frac{\partial}{\partial(ct)} + \beta \alpha^i \nabla_i \right] \psi = mc \psi$$

ou

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = (i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0,$$

isto é em "forma manifestamente elegante":

$$\boxed{(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0}$$

Mostremos que a eq. de Dirac fornece uma equação de continuidade com uma densidade escalar de corrente definida positiva. Escrevemos a eq. na forma:

$$i\hbar\,\partial_t\psi = -i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi + mc^2\beta\psi\,, \quad (2a)$$

e a adjunta:

$$-i\hbar\,\partial_t\psi^\dagger = i\hbar c\,\nabla\psi^\dagger\cdot\vec{\alpha} + mc^2\psi^\dagger\beta\,; \quad (2b)$$

lembrar que $\vec{\alpha}$ e β são hermiteanas. Multiplicamos (2a) por $\psi^\dagger$ pela esquerda e depois (2b) por ψ pela direita e substraimos:

$$\psi^\dagger(2a) - (2b)\psi$$

$$i\hbar\,\psi^\dagger\partial_t\psi + i\hbar(\partial_t\psi^\dagger)\psi = i\hbar\left[\psi^\dagger\partial_t\psi + (\partial_t\psi^\dagger)\psi\right]$$

$$= i\hbar\,\partial_t(\psi^\dagger\psi)$$

$$= -i\hbar c\,\psi^\dagger(\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi) + mc^2\cancel{\psi^\dagger\beta\psi}$$
$$-i\hbar c\,(\nabla\psi^\dagger\cdot\vec{\alpha})\psi - mc^2\cancel{\psi^\dagger\beta\psi}$$

$$= -i\hbar\,\nabla\cdot(\psi^\dagger c\vec{\alpha}\psi) \qquad \text{e assim}$$

$$\boxed{\partial_t(\psi^\dagger\psi) + \nabla\cdot(\psi^\dagger c\vec{\alpha}\psi) = 0}$$

de maneira que obtemos uma densidade de corrente

$$J^0 = c\rho = c\psi^\dagger\psi ,$$

$$\vec{J} = \psi^\dagger c\vec{\alpha}\psi ,$$

com a densidade $\rho = \psi^\dagger\psi = (\psi_1^*\psi_2^*\psi_3^*\psi_4^*)\cdot\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} =$

$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geqslant 0 ,$$

sendo definida positiva.

Consideremos agora a representação de ψ em bi-spinores:

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \hdashline \chi\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\partial_t\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = -i\hbar c\left(\begin{array}{c:c}0 & \vec{\sigma}\\ \hdashline \vec{\sigma} & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}\nabla\varphi\\ \nabla\chi\end{pmatrix} +$$

$$+ mc^2\left(\begin{array}{c:c}1 & 0\\ \hdashline 0 & -1\end{array}\right)\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} ,$$

e separando componentes

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi = -i\hbar c(\vec{\sigma}.\nabla\chi) + mc^2\varphi \\ \\ i\hbar\partial_t\chi = -i\hbar c(\vec{\sigma}.\nabla\varphi) - mc^2\chi \end{cases}$$